Acerca del enlentecimiento de los relojes acelerados II: tiempo propio relativista y unus mundus físico

About the slowing down of accelerated clocks II: relativistic proper time and physical unus mundus

Roberto Suárez-Antola
OMNIA Sciences/Technologies/Services
Montevideo, Uruguay
robertosua@gmail.com

Resumen:
La convergencia de la integral que da el tiempo propio en función del tiempo inercial, cuando la velocidad tiende a la velocidad de la luz lo suficientemente rápido mientras el tiempo inercial tiende al infinito, fue estudiada en 1985. Aquí se reconsidera este problema en el marco de la teoría restringida de la relatividad. Nada especial (además de la tasa de crecimiento hacia el infinito) parece caracterizar el comportamiento de la componente tangencial de los campos de 3-fuerza a lo largo de la trayectoria del reloj acelerado, en relación con la convergencia o divergencia de la integral que da el tiempo propio como función del tiempo inercial. Sin embargo, visto desde el punto de vista de la aceleración propia del reloj, aparece una diferencia físicamente significativa entre los dos casos lógicamente posibles. Uno está integrado por las historias de 3-aceleración propia tangenciales que dan un tiempo propio finito para un tiempo inercial infinito. El otro está integrado por las historias de 3-aceleraciones propias tangenciales que dan un tiempo propio infinito para un tiempo inercial infinito. En el primer caso aparece una singularidad en la 3-aceleracion propia para un valor finito de tiempo propio. En el segundo caso esa singularidad no aparece. Los resultados obtenidos se comparan, en el marco de la teoría de la relatividad general, con el la relación entre el tiempo propio y el tiempo inercial durante la caída de una partícula hacia un agujero negro. Se enfatizan las consecuencias de estos resultados sobre la validez de un postulado que se encuentra en la base de la formulación original de la teoría de la relatividad, según el cual todos los observadores en el universo, con independencia de su estado de movimiento, deben estar de acuerdo sobre la ocurrencia de ciertos sucesos, tales como explosiones e implosiones, nacimientos y muertes.
Palabras clave: teoría restringida de la relatividad, teoría generalizada de la relatividad, tiempo propio, tiempo inercial, unus mundus, agujero negro.

Abstract:
The convergence of the integral that gives the proper time as a function of inertial time, when speed tends to the speed of light fast enough as inertial time tends to infinity, was studied in 1985. This problem is reconsidered here, in the framework of special relativity. Nothing special (besides the rate of growth towards infinity) seems to characterize the behavior of the tangent component of the fields of 3-force along the path of the accelerated clock, in relation with the convergence or divergence of the integral that gives proper time as function of inertial time. However, seen from the viewpoint of the proper acceleration of the clock, a physically meaningful difference appears between the tangential proper 3-acceleration histories that give a finite proper time for an infinite inertial time, and those tangential proper 3-acceleration histories that give an infinite proper time for an infinite inertial time: either a singularity in proper 3-acceleration for a finite value of proper time in one case, or its absence in the other case. The obtained results are compared, in the framework of general relativity theory, with the behavior of proper time relative to inertial time during the fall of a

particle towards a black hole. The consequences of these results on the validity of a postulate that is at the base of the original formulation of the theory of relativity are emphasized, according to which all observers in the universe, regardless of their state of movement, should agree on the occurrence of certain events, such as explosions and implosions, births, and deaths.
Key words: restricted relativity theory, generalized relativity theory, proper time, inertial time, unus mundus, black hole.

1.-Introducción

Unus mundus, que en latín significa "un mundo", es el concepto de una realidad subyacente unificada de la que todo emerge y a la que todo regresa. Restringido al dominio de la Física, alude al postulado según el cual todos los observadores en el universo, con independencia de su estado de movimiento, deben estar de acuerdo sobre la ocurrencia de ciertos sucesos, tales como explosiones e implosiones, nacimientos y muertes.
Este postulado se encuentra en la base de la formulación original de la teoría restringida de la relatividad que, entre otras cosas, es una teoría de invariantes en el tiempo-espacio plano. (1)

En la teoría restringida de la relatividad, a diferencia de lo que acontece en la teoría generalizada, se hace una distinción entre marcos de referencia inerciales y marcos de referencia no inerciales. La descripción del movimiento de un reloj realizada por un observador inercial (es decir, un observador fijo a un sistema inercial) es generalmente mucho más simple que la descripción realizada por un observador fijo a un sistema de referencia no inercial. En la teoría restringida es posible escribir las ecuaciones de las leyes físicas respecto de sistemas de referencia no inerciales, hacienda una descripción en el espacio-tiempo plano de Minkowski. Se debe introducir un tensor métrico en este espacio plano, empleando herramientas matemáticas que tienen un cierto parecido con las que se emplean en la teoría generalizada de la relatividad. (2) (3) (4)

Ahora bien, cuando se considera el transcurso del tiempo propio para los relojes que se encuentran acelerados respecto de un observador inercial, se encuentra un problema interesante, que parece contradecir el postulado de unidad del tiempo-espacio.
Comencemos considerando un observador inercial que registra el movimiento de un reloj acelerado.
Convengamos que un reloj es cualquier dispositivo físico que se puede considerar como una partícula, que sigue una línea de universo temporaloide y que genera una secuencia de eventos llamados tics. Un reloj ideal es un reloj tal que el tiempo propio transcurrido entre dos tics (no necesariamente consecutivos) es proporcional al número de tics entre el primer tic y el último tic considerado, con el mismo factor de proporcionalidad en cada punto de la línea de universo del reloj.
Esta definición presupone definir el tiempo propio transcurrido entre dos eventos, a lo largo de una trayectoria temporaloide en el espacio-tiempo de Minkowski, como la longitud del segmento de la línea de universo entre estos dos eventos determinada a partir del tensor métrico en ese espacio-tiempo. (4)
Entonces, un reloj ideal es un reloj que mide el tiempo propio. Si se describe, respecto a un sistema inercial, una línea de universo formada por eventos en el espacio-tiempo de

Minkowski, se puede calcular el tiempo propio a lo largo de esta línea de universo mediante una fórmula que relacione el tiempo propio con el tiempo inercial.

De acuerdo con la hipótesis del reloj, si un reloj ideal se mueve de manera no uniforme a través de un marco inercial, la aceleración como tal no tiene efecto en la velocidad del reloj: su ritmo en un instante respecto de un sistema inercial depende solo de su velocidad en ese mismo instante respecto de ese sistema inercial.
Se supone que el ritmo del reloj acelerado es idéntico al ritmo de un reloj fijo al marco inercial que en el instante considerado se encuentra en co-movimiento con el reloj acelerado. (5) (6) (7)

Entonces, en el marco de la teoría restringida de la relatividad y aceptando la hipótesis del reloj, el tiempo propio τ para todos los observadores acelerados viene dado como función del tiempo inercial por la fórmula[1]:

$$\tau(t) = \tau(t_0) + \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 - \frac{v^2(t')}{c^2}} \cdot dt' \qquad (1.1)$$

En (1.1) la velocidad de la luz en el vacío viene representada por c, mientras que t_0 es el valor inicial del tiempo inercial t y $v(t)$ es la historia de rapidez del reloj acelerado, respecto del sistema inercial de referencia. La rapidez se define como $v = \|\vec{v}\|$, donde $\|\vec{v}\|$ es la norma del vector velocidad $\vec{v}$.
Si la masa propia del reloj es diferente de cero, su historia de velocidad debe verificar la desigualdad estricta $v(t) < c$, para cada instante de tiempo inercial.

En 1984 José Ferrari concibió una posibilidad interesante: que la función $v(t)$ se aproxime a su cota superior c tan rápido como para que $\int_{t_0}^{+\infty} \sqrt{1 - \frac{v^2(t')}{c^2}} \cdot dt$ resulte convergente. Si así fuera, definamos:

$$\tau_s = \lim_{t \to +\infty} \tau(t) = \tau(t_0) + \int_{t_0}^{+\infty} \sqrt{1 - \frac{v^2(t')}{c^2}} \cdot dt' \qquad (1.2)$$

Entonces resultaría imposible asignar un instante de tiempo inercial t a un instante de tiempo propio $\tau > \tau_s$.
Una condición necesaria para que un observador fijo al sistema de referencia inercial y un observador que se mueve con el reloj acelerado se puedan poner de acuerdo acerca de la ocurrencia de ciertos eventos, tales como explosiones e implosiones, nacimientos y muer-

---

[1] En lo que sigue se utiliza muchas veces el símbolo $\cdot$ para resaltar la multiplicación de dos escalares, mientras que el símbolo $\bullet$ se emplea para representar el producto escalar de vectores.

tes, es que exista una correspondencia uno a uno entre cada instante de tiempo t y cada instante de tiempo τ .

De (1.1) se desprende que $\frac{d}{dt}\tau(t)=\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}>0$ de modo que la correspondencia entre los instantes de tiempo inercial y los correspondientes instantes de tiempo propio para el reloj acelerado es uno a uno. Hasta este punto, todo bien.

Pero admitamos, como se hace en casi todas las ramas de la Física, con excepción de la Cosmología y tal vez, la Astrofísica, que el tiempo no está acotado. Entonces, si la integral del tiempo propio $\int_{t_0}^{+\infty}\sqrt{1-\frac{v^2(t')}{c^2}}\cdot dt$ resulta ser convergente y si, además, suponemos que el tiempo propio no está acotado, parte de la experiencia del observador acelerado junto con el reloj debe ocurrir fuera del universo del observador fijo al sistema inercial. Los nacimientos y las muertes, las explosiones y las implosiones que pudieran ser parte de la experiencia del observador fijo al reloj acelerado para instantes de tiempo propio posteriores a τ_s no podrían ser parte de la experiencia del observador inercial.

Así pues, parece que tenemos un problema, muy diferente a la paradoja de los gemelos. [2]

Este problema motivó una breve discusión en una carta al Nuovo Cimento. (8)

Con el propósito de aportar una solución preliminar, en la carta mencionada se contemplaron dos puntos de vista alternativos:

(a) La hipótesis del reloj es solo una aproximación, válida si se cumplen ciertas restricciones.

(b) Dicha hipótesis es siempre aplicable, pero en la naturaleza solo podemos encontrar campos de fuerza respecto del observador inercial tales que $\int_{t_0}^{+\infty}\sqrt{1-\frac{v^2(t')}{c^2}}\cdot dt$ siempre resulte ser divergente.

Este trabajo persigue los siguientes objetivos:

(a)-Profundizar la investigación de la relación, relativa a un observador inercial, entre la 3-fuerza relativista que actúa sobre el reloj ideal acelerado y la integral del tiempo propio como función del tiempo inercial. Esto se hace en la sección 2.

(b)-Relacionar la convergencia de la integral del tiempo propio con el comportamiento de la 3-aceleración propia del reloj. Este problema se estudia en la sección 3.

---

[2] Sobre la paradoja de los gemelos en el marco del postulado del reloj ver el Apéndice A.

(c)-Comparar los resultados obtenidos para la relación entre tiempo propio y tiempo inercial para el movimiento de un observador considerado como una partícula acelerada en un espacio de curvatura nula, con la relación entre el tiempo propio y el tiempo inercial durante la caída de un observador, considerado también como partícula, hacia un agujero negro. Esto se lleva a cabo en la sección 4.

(d)-Discutir el significado de los resultados obtenidos en un marco más amplio. Esa discusión y algunas conclusiones se presentan en la sección 5.

El límite entre la relatividad especial y la generalizada generalmente se establece basándose en la curvatura del espacio-tiempo, no en una distinción entre observadores acelerados y no acelerados. (2) (3) (4)
Debido a esto, el análisis del movimiento del reloj acelerado se realizará en el marco de la relatividad especial. La aceleración del reloj puede tratarse en un sistema inercial: los marcos de referencia acelerados no son necesarios en este caso, aunque se pueden usar en relatividad especial.
En la caída de un reloj ideal hacia un agujero negro los efectos gravitatorios son fundamentales. Entonces el espacio no se puede considerar plano y la teoría restringida no resulta aplicable. La caída del reloj hacia un agujero negro se analizará en coordenadas de Schwarzschild, en el marco de la teoría general de la relatividad.

2.-La hipótesis del reloj y el comportamiento de los campos de fuerza respecto de un observador inercial

En el trabajo previo sobre el enlentecimiento de los relojes acelerados estudiamos la convergencia de la integral del tiempo propio en función del tiempo inercial suponiendo que los relojes se mueven paralelamente a uno de los ejes de coordenadas del marco de referencia inercial. (8) (9)
En esta sección se generaliza la investigación de la convergencia a movimientos cualesquiera en tres dimensiones espaciales.

2.1 3-Fuerza dada como función del tiempo a lo largo de la trayectoria del reloj acelerado.

Describimos el movimiento de un reloj acelerado (considerado como partícula con masa en reposo m_0), respecto de un marco inercial S, mediante su vector de posición $\vec{r}(t)$, que es suponemos es una función regular del tiempo inercial para $t \geq t_0$.

La trayectoria seguida por el reloj se representa por Γ, mientras que un arco de trayectoria, comprendido entre un punto inicial P_0 de coordenadas $(t_0, \vec{r}(t_0))$ y un punto final P de coordenadas $(t, \vec{r}(t))$, se representa mediante $\Gamma_{P_0 P}$.

La trayectoria del reloj puede pasar por los mismos puntos del espacio 3D-euclídeo más de una vez, como ocurre, por ejemplo, durante un movimiento circular, de modo que un arco de curva puede ser recorrido más de una vez por un arco de trayectoria.

Debido a que $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$ y su norma $\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|$ es la rapidez $v(t)$ del reloj, la longitud $l_{\Gamma_{P_0 P}}$ de ese arco viene dada por:

$$l_{\Gamma_{P_0 P}} = l(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\vec{r}(t')}{dt} \right\| \cdot dt' \qquad (2.1)$$

De (2.1) se desprende que: $\frac{d}{dt} l(t) = v(t)$ Suponiendo que $v(t) > 0$ para $t \geq t_0$, la derivada del arco de trayectoria con respecto del tiempo inercial es siempre positiva, de modo que $l(t)$ resulta ser una función estrictamente creciente del tiempo inercial. Más aún, supondremos que $\lim_{t \to +\infty} l(t) = +\infty$

Entonces, la función inversa $t = t(l)$ existe para todo $l \geq 0$ y como consecuencia a cada instante de tiempo inercial $t \geq t_0$ le corresponde un valor de longitud de arco de trayectoria $l \geq 0$ y viceversa.

Introduzcamos ahora el vector unitario tangente en cada punto de la trayectoria:

$$\vec{t}_\Gamma(t) = \vec{t}_\Gamma(t(l)) = \frac{d}{dl} \vec{r}(t(l)) \qquad (2.2)$$

Entonces la velocidad del reloj $\vec{v}$ y su cantidad de movimiento $\vec{p}$ vienen dados por:

$$\vec{v}(t) = v(t) \cdot \vec{t}_\Gamma(t) \qquad (2.3) \qquad\qquad \vec{p}(t) = p(t) \cdot \vec{t}_\Gamma(t) \qquad (2.4)$$

Si m_0 es la masa en reposo del reloj y $\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ es su factor gama, entonces:

$$p(t) = m_0 \cdot \gamma_v \cdot v(t) \qquad (2.5)$$

De (2.4) se desprende que la versión relativista de la segunda ley de Newton se puede escribir, introduciendo una 3-fuerza relativista $\vec{f}$:

$$\frac{dp(t)}{dt}\cdot\vec{t}_\Gamma(t)+p(t)\cdot\frac{d\vec{t}_\Gamma(t)}{dt}=\vec{f}(t) \qquad (2.6)$$

En lo que sigue supondremos que la 3-fuerza relativista es una función regular, ya sea del tiempo, ya sea de la posición sobre la trayectoria Γ seguida por el reloj acelerado respecto del marco de referencia inercial S .
Representemos ahora mediante el símbolo $\bullet$ el producto escalar de vectores en el espacio euclídeo 3-D. Como $\left\|\vec{t}_\Gamma(t)\right\|=1$ para todo instante, resulta $\vec{t}_\Gamma(t)\bullet\frac{d}{dt}\vec{t}_\Gamma(t)=0$

De esta última igualdad y de (2.6) se desprende:

$$\frac{dp}{dt}=\vec{f}\bullet\vec{t}_\Gamma \qquad (2.7)$$

Entonces:

$$p(t)=p(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(\vec{f}\bullet\vec{t}_\Gamma\right)(t')\cdot dt' \qquad (2.8)$$

De (2.5) se desprende que:

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p^2}{m_0^2\cdot c^2}}} \qquad (2.9)$$

Por tanto:

$$\tau(t)-\tau(t_0)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{1-\frac{v^2(t')}{c^2}}\cdot dt'=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p^2(t')}{m_0^2\cdot c^2}}}\cdot dt' \qquad (2.10)$$

En consecuencia, de (2.8) y (2.10) resulta que $\int_{t_0}^{+\infty}\sqrt{1-\frac{v^2(t')}{c^2}}\cdot dt'$ es convergente siempre y cuando lo sea

$$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\left[p(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(\vec{f}\bullet\vec{t}_\Gamma\right)(t')\cdot dt'\right]^2}{m_0^2\cdot c^2}}}\cdot dt \qquad (2.11)$$

Una condición necesaria para que la integral (2.11) pueda ser convergente es la no acotación de la integral $\int_{t_0}^{t}\left(\vec{f}\bullet\vec{t}_\Gamma\right)(t')\cdot dt'$ cuando $t\to+\infty$.

Para simplificar, supongamos que la componente $\left(\vec{f}\bullet\vec{t}_\Gamma\right)(t)$ de la 3-fuerza tangencial a la trayectoria del reloj es siempre positiva y no presenta singularidades en el intervalo $[t_0,+\infty)$. Consideraremos dos casos típicos.

En el primero, cuando $t\to+\infty$, la componente tangencial de la 3-fuerza $\left(\vec{f}\bullet\vec{t}_\Gamma\right)(t)$ se comporta como $\log_e t$. En este caso la integral $\int_{t_0}^{t}\left(\vec{f}\bullet\vec{t}_\Gamma\right)(t')\cdot dt'$ se comporta como $t\cdot\log_e t$ y $\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{\int_{t_0}^{t}\left(\vec{f}\bullet\vec{t}_\Gamma\right)(t')\cdot dt'}\cdot dt$ se comporta como $\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{t\cdot\log_e t}\cdot dt$ que es divergente.

En este caso $\int_{t_0}^{+\infty}\sqrt{1-\frac{v^2(t')}{c^2}}\cdot dt'$ diverge y el tiempo propio del reloj acelerado tiende a infinito con el tiempo inercial.

En el segundo caso $\left(\vec{f}\bullet\vec{t}_\Gamma\right)(t)$ se comporta, asintóticamente para $t\to+\infty$, como t^q con $q>0$. Entonces $\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{\int_{t_0}^{t}\left(\vec{f}\bullet\vec{t}_\Gamma\right)(t')\cdot dt'}\cdot dt$ se comporta como $\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{t^{q+1}}\cdot dt$ que es convergente.

A diferencia de lo que acontece en el caso previo, ahora $\int_{t_0}^{+\infty}\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\cdot dt$ converge y el tiempo propio del reloj acelerado tiende a un valor finito cuando el tiempo inercial tiende a infinito.

En ambos casos $(\vec{f}\bullet\vec{t}_\Gamma)(t)$ tiende a infinito cuando el tiempo inercial tiende a infinito, pero mientras que en un caso la integral del tiempo propio diverge, en el otro converge. La única diferencia entre uno y otro caso es el orden de infinitud de la componente tangencial de la 3-fuerza cuando el tiempo inercial tiende a infinito.

2.2 3-Fuerza dada como función de la posición a lo largo de la trayectoria del reloj acelerado.

Cuando la 3-fuerza viene dada como una función $\vec{f}(\vec{r})$ de la posición $\vec{r}$ del reloj en el marco de referencia inercial, se puede efectuar un cambio en la variable de integración en la integral del tiempo propio, para expresarla en función de la longitud de arco de trayectoria en lugar del tiempo inercial, puesto que $t=t(l)$ es una función regular estrictamente monótona sobre la trayectoria Γ del reloj acelerado. De (2.9) se deduce, luego de efectuar algunos cálculos:

$$\int_{t_0}^{t}\sqrt{1-\frac{v^2(t')}{c^2}}\cdot dt'=\int_{l=0}^{l}\sqrt{1-\frac{v^2(t(l'))}{c^2}}\cdot\frac{dl'}{v(t(l'))}=m_0\cdot\int_{l=0}^{l}\frac{dl'}{p(t(l'))} \tag{2.12}$$

Por tanto, para que $\int_{t_0}^{+\infty}\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\cdot dt$ pueda ser convergente, la cantidad de movimiento $p(l)$ no puede estar acotada cuando la longitud del arco de trayectoria tiende a infinito.

Sobre la trayectoria 3-D del reloj hay una correspondencia uno a uno entre $\vec{r}(t)$ y $l(t)$ lo cual permite escribir la 3-fuerza como función $\vec{f}(l)$ de la longitud de arco.

De (2.7) se deduce:
$$v(l)\cdot\frac{dp}{dl}=\vec{f}(l)\bullet\vec{t}_\Gamma(l) \tag{2.13}$$

De (2.5) resulta:

$$v=\frac{\dfrac{p}{m_0}}{\sqrt{1+\dfrac{p^2}{m_0^2\cdot c^2}}} \tag{2.14}$$

De (2.13) y (2.14) se desprende:

$$\int_0^l \frac{\dfrac{p(l')}{m_0}}{\sqrt{1+\dfrac{p^2(l')}{m_0^2\cdot c^2}}}\cdot dl'=\int_0^l\left(\vec{f}(l')\bullet\vec{t}_\Gamma(l')\right)\cdot dl' \tag{2.15}$$

Por otra parte:

$$\int_0^l \frac{\dfrac{p(l')}{m_0}}{\sqrt{1+\dfrac{p^2(l')}{m_0^2\cdot c^2}}}\cdot dl'=m_0\cdot c^2\cdot\left(\sqrt{1+\frac{p^2(l)}{m_0^2\cdot c^2}}-\sqrt{1+\frac{p^2(0)}{m_0^2\cdot c^2}}\right) \tag{2.16}$$

Entonces, de (2.15) y (2.16):

$$\int_{t_0}^{+\infty}\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\cdot dt=\frac{1}{c}\cdot\int_{l_0}^{+\infty}\frac{dl}{\sqrt{\left[\left(\sqrt{1+\dfrac{p^2(0)}{m_0^2\cdot c^2}}+\dfrac{\int_0^l\left(\vec{f}(l')\bullet\vec{t}_\Gamma(l')\right)\cdot dl'}{m_0\cdot c^2}\right)^2-1\right]}} \tag{2.17}$$

De (2.17) resulta que una condición necesaria para que la integral del tiempo propio $\int_{t_0}^{+\infty}\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\cdot dt$ sea convergente es que $\left|\int_0^l\left(\vec{f}(l')\bullet\vec{t}_\Gamma(l')\right)\cdot dl'\right|$ no esté acotada cuando $l\to+\infty$. En este último caso la integral del miembro de la derecha en la igualdad (2.17) converge siempre y cuando $\int_{l_0}^{+\infty}\frac{dl}{\left|\int_0^l\left(\vec{f}(l')\bullet\vec{t}_\Gamma(l')\right)\cdot dl'\right|}$ sea convergente.

Para simplificar el análisis supondremos que $\vec{f}(l)\bullet\vec{t}_\Gamma(l)>0$ para todo valor de la longitud de arco de trayectoria.

Consideremos ahora dos casos. En el primero de ellos $\vec{f}(l)\bullet\vec{t}_\Gamma(l)$ se comporta como $\log_e l$ asintóticamente cuando $l\to+\infty$. En ese caso $\int_{l_0}^{+\infty}\frac{dl}{\int_0^l\left(\vec{f}(l')\bullet\vec{t}_\Gamma(l')\right)\cdot dl'}$ diverge y por tanto también diverge la integral $\int_{t_0}^{+\infty}\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\cdot dt$.

En el segundo caso $\vec{f}(l)\bullet\vec{t}_\Gamma(l)$ se comporta como l^q ($q>0$) se comporta como $l\cdot\log_e l$ asintóticamente cuando $l\to+\infty$. Para esta componente tangencial de la 3-fuerza $\int_{l_0}^{+\infty}\frac{dl}{\int_0^l\left(\vec{f}(l')\bullet\vec{t}_\Gamma(l')\right)\cdot dl'}$ converge y por tanto también converge la integral del tiempo propio.

Estas consideraciones se pueden aplicar cuando la 3-fuerza depende de un potencial y conducen a relacionar la convergencia de la integral del tiempo propio con el comportamiento del potencial sobre la trayectoria del reloj acelerado.

Cuando el movimiento provocado por una fuerza dependiente de un potencial se produce en el interior de una región acotada del espacio euclidiano 3-D la integral del tiempo propio diverge siempre y en este caso el problema que motiva este trabajo no se plantea.

En todos los casos considerados nada especial, si se exceptúa el orden de infinitud, parece caracterizar el comportamiento de la componente tangencial de la 3-fuerza a lo largo de la trayectoria del reloj acelerado, en relación con la convergencia o divergencia de la integral que da el tiempo propio como función del tiempo inercial. La frontera entre la convergencia y la divergencia de esa integral cuando el tiempo inercial tiende a infinito no se encuentra, por ejemplo, entre campos acotados y campos no acotados en el infinito, lo cual sería una diferencia físicamente significativa.

3.- La hipótesis del reloj y el comportamiento de la aceleración propia

Modifiquemos entonces nuestro punto de vista para ver si es posible identificar una diferencia físicamente significativa cuando la 3-fuerza y la 3-aceleración se refieren al propio reloj acelerado.

Como hay una correspondencia regular y uno a uno entre el tiempo inercial t y el tiempo propio τ , realicemos un cambio de variable en la ecuación (2.7) considerando que todas las variables dependientes son funciones del tiempo propio del reloj acelerado.

Teniendo en cuenta que $\frac{dp}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2(\tau)}{c^2}\right)}\cdot\frac{d}{d\tau}v(\tau)$ la ecuación (2.7) se puede reescribir así:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2(\tau)}{c^2}\right)}\cdot\frac{d}{d\tau}v(\tau)=\frac{\vec{f}(\tau)\bullet\vec{t}_\Gamma(\tau)}{m_0} \qquad (3.1)$$

Integrando esta última ecuación entre τ_0 y τ se obtiene la rapidez del reloj respecto del marco inercial, pero en función de su tiempo propio[3]:

$$\frac{v(\tau)}{c}=th\left(\psi_\Gamma(\tau)+arcth\left(\frac{v(\tau_0)}{c}\right)\right) \qquad (3.2)$$

Por definición:

$$\psi_\Gamma(\tau)=\frac{1}{m_0\cdot c}\cdot\int_{\tau_0}^{\tau}\vec{f}(\tau')\bullet\vec{t}_\Gamma(\tau')\cdot d\tau' \qquad (3.3)$$

Introduzcamos ahora la familia $\left\{S^0(t)\right\}$ formada por los marcos de referencia inerciales en co-movimiento con el reloj acelerado. El marco inercial $S^0(t)$ se mueve, respecto del marco inercial S y en el instante t, con la misma velocidad que el reloj, de modo que el reloj se encuentra momentáneamente en reposo respecto de $S^0(t)$. Pero como el reloj está acelerado respecto de S, también lo estará respecto de $S^0(t)$. Entonces en un instante $t+\Delta t$ posterior su velocidad respecto de $S^0(t)$ ya no será nula. Esa aceleración puede medirse mediante un acelerómetro fijo al reloj: es la 3-aceleración propia $\vec{a}^0$ del reloj. (2) (3) (4)

Entre la 3-fuerza relativista $\vec{f}$ actuante sobre el reloj, vista desde S, y la 3-fuerza relativista $\vec{f}^0$ (3-fuerza propia) actuante sobre el reloj, vista desde $S^0(t)$, se verifica la relación (5):

$$\vec{f}=\frac{1}{\gamma_v}\cdot\vec{f}^0+\left(1-\frac{1}{\gamma_v}\right)\cdot\frac{\left(\vec{f}^0\bullet\vec{v}\right)}{v^2}\cdot\vec{v} \qquad (3.4)$$

---

3 Las funciones hiperbólicas se representan mediante th (tangente hiperbólica), ch (coseno hiperbólico), etc. Sus funciones inversas se representan anteponiendo arc al símbolo de la función directa.

Como $\vec{v}(t) = v(t) \cdot \vec{t}_{\Gamma}(t)$ (Fórmula (2.3)), formando el producto escalar de ambos miembros de la fórmula (3.4) con el vector unitario tangente a la trayectoria del reloj en el marco S y poniendo el tiempo inercial como función del tiempo propio $t = t(\tau)$, se obtiene la notable relación de igualdad entre la componente tangencial de la 3-fuerza relativista y la componente tangencial de la 3-fuerza propia relativista:

$$\vec{f}(\tau) \bullet \vec{t}_{\Gamma}(\tau) = \vec{f}^{\,0}(\tau) \bullet \vec{t}_{\Gamma}(\tau) \tag{3.5}$$

Ahora bien, la 3-fuerza propia se relaciona así con la 3-aceleración propia: $\vec{f}^{\,0} = m_0 \cdot \vec{a}^{\,0}$ (5) por lo cual, de esta última ecuación y de la (3.3) se desprende:

$$\psi_{\Gamma}(\tau) = \frac{1}{c} \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \vec{a}^{\,0}(\tau') \bullet \vec{t}_{\Gamma}(\tau') \cdot d\tau' \tag{3.6}$$

De la ecuación que vincula las 3-fuerzas con las 3-aceleraciones obtenemos (5):

$$\vec{f} \bullet \vec{t}_{\Gamma} = m_0 \cdot \left(\gamma_v^3 \cdot \frac{(\vec{a} \bullet \vec{v})}{c^3} \cdot (\vec{t}_{\Gamma} \bullet \vec{v}) + \gamma_v \cdot (\vec{t}_{\Gamma} \bullet \vec{a}) \right) \tag{3.7}$$

Como $\gamma_v = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ la (3.7) se reduce a:

$$\vec{f} \bullet \vec{t}_{\Gamma} = m_0 \cdot \gamma_v^3 \cdot (\vec{a} \bullet \vec{t}_{\Gamma}) \tag{3.8}$$

Supongamos, para simplificar el análisis, que la componente $\vec{a}^{\,0}(\tau) \bullet \vec{t}_{\Gamma}(\tau)$ de la 3-aceleración propia es siempre positiva. Si esto es así, de (3.6) se deduce que la función $\psi_{\Gamma}(\tau)$ es estrictamente creciente con el tiempo propio.

Si $v(\tau_0) = 0$, (3.2) se reduce a $\dfrac{v(\tau)}{c} = th(\psi_{\Gamma}(\tau))$ y en este caso, teniendo en cuenta esta última fórmula obtenemos para la derivada del tiempo inercial respecto del tiempo propio:

$$\frac{dt(\tau)}{d\tau} = \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2(\tau)}{c^2}}} = \cosh(\psi_{\Gamma}(\tau)) \tag{3.9}$$

Integrando (3.9) y teniendo en cuenta (3.6) obtenemos:

$$t(\tau) = t(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \cosh\left(\frac{1}{c} \cdot \int_{\tau_0}^{\tau'} \vec{a}^{\,0}(\tau'') \bullet \vec{t}_{\Gamma}(\tau'') \cdot d\tau'' \right) \cdot d\tau' \tag{3.10}$$

La convergencia de la integral del tiempo propio $\int_{t_0}^{+\infty} \sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}} \cdot dt$ equivale a la existencia de un instante τ_s de tiempo propio tal que $t(\tau)$ está acotada para todo $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ siendo $\tau_0 \leq \tau_1 < \tau_s$, pero se verifica:

$$\int_{\tau_0}^{\tau_s} \cosh\left(\frac{1}{c} \cdot \int_{\tau_0}^{\tau'} \vec{a}^0(\tau'') \bullet \vec{t}_\Gamma(\tau'') \cdot d\tau''\right) \cdot d\tau' = \int_{\tau_0}^{\tau_s} \cosh(\psi(\tau')) \cdot d\tau' = +\infty \qquad (3.11)$$

De acuerdo con (3.11), tenemos una integral divergente sobre un intervalo de integración finito[4], con un integrando positivo que debe presentar una singularidad en $\tau = \tau_s$.
El integrando, por la definición usual del coseno hiperbólico como combinación de exponenciales, verifica: $$\cosh(\psi(\tau)) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{+\psi(\tau)} + e^{-\psi(\tau)}\right)$$

Pero como $\psi_\Gamma(\tau)$ es positiva y estrictamente creciente con el tiempo propio a lo largo de la trayectoria del reloj (por (3.6) y la hipótesis efectuada sobre el signo de $\vec{a}^0(\tau) \bullet \vec{t}_\Gamma(\tau)$) resulta que la divergencia de $\int_{\tau_0}^{\tau_s} \cosh(\psi(\tau')) \cdot d\tau'$ se reduce a la divergencia de la integral $\int_{\tau_0}^{\tau_s} e^{+\psi(\tau')} \cdot d\tau'$. Como consecuencia el integrando $e^{+\psi(\tau)}$ debe presentar una singularidad en $\tau = \tau_s$, lo cual ocurre siempre y cuando $\psi_\Gamma(\tau)$ presente una singularidad allí:

$\lim_{\tau \uparrow \tau_s} \psi_\Gamma(\tau) = +\infty$ De la fórmula (3.6) se desprende que este comportamiento de $\psi_\Gamma(\tau)$ es posible siempre y cuando $\vec{a}^0(\tau) \bullet \vec{t}_\Gamma(\tau)$ presente una singularidad en $\tau = \tau_s$:

$\lim_{\tau \uparrow \tau_s} \vec{a}^0(\tau) \bullet \vec{t}_\Gamma(\tau) = +\infty$ Para que la integral del tiempo propio $\int_{t_0}^{+\infty} \sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}} \cdot dt$ pueda ser convergente, la componente tangencial de la 3-aceleración propia debe presen-

---

[4] Sobre la convergencia de las integrales impropias puede consultarse el tomo II del curso de matemáticas superiores de Smirnov, el tomo II del curso de análisis matemático de Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, u otros libros de cálculo avanzado o análisis matemático, como el cálculo avanzado de Kaplan.

tar una singularidad. Si esa singularidad no existe para un cierto instante $\tau = \tau_s$ de tiempo propio, ya sea porque $\psi_\Gamma(\tau)$ permanece acotada o solamente tiende a infinito cuando $\tau \to +\infty$, entonces $\int_{\tau_0}^{\tau} \cosh(\psi(\tau')) \cdot d\tau'$ puede tender a infinito solo si τ tiende a infinito. Pero en este último caso $\int_{t_0}^{+\infty} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \cdot dt$ debe ser divergente, y el problema que estamos investigando no aparece.

En el apéndice C se puede hallar un ejemplo de singularidad en la 3-aceleración propia que conduce a la convergencia de la integral del tiempo propio.

Como consecuencia de lo expuesto en esta sección del artículo, aparece una diferencia físicamente significativa entre las historias de 3-aceleración propia tangencial $\vec{a}^0 \bullet \vec{t}_\Gamma$ (y por ende entre las historias de 3-fuerza propia tangencial $\vec{f}^0 \bullet \vec{t}_\Gamma$, puesto que $\vec{f}^0 = m_0 \cdot \vec{a}^0$) que conduce a un tiempo propio finito para un intervalo de tiempo inercial infinito, y las historias de 3-aceleración propia tangencial (y sus historias de 3-fuerza propia tangencial) que conducen a un tiempo propio infinito para un intervalo de tiempo inercial infinito: una singularidad en la 3-aceleración propia en el primer caso y su ausencia en el segundo caso.

4.-Tiempo propio y tiempo inercial durante la caída de una partícula hacia un agujero negro.

Como se demuestra en el Apéndice D utilizando coordenadas de Schwarzschild, la duración τ_S del intervalo de tiempo propio que tarda una partícula, que parte del reposo desde una distancia radial r_0 respecto del centro de un agujero negro (que no rota), en alcanzar la distancia radial $r = r_S$ correspondiente al radio de Schwarzschild del agujero, si se supone que $\frac{r_S}{r_0}$ es despreciable respecto de la unidad, viene dada por:

$$\tau_S \approx \frac{r_0^{\frac{3}{2}}}{c \cdot r_S^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{r_S}{r_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

Así pues, un cuerpo que se deja caer desde el reposo, a partir de un valor de su coordenada radial muy grande respecto del radio de Schwarzschild de un agujero negro (que no rota), emplea un intervalo finito de tiempo propio en alcanzar el horizonte de eventos del agujero negro, situado en $r = r_S$. No obstante, la duración de la caída hasta el horizonte de eventos del agujero negro, medida en términos de tiempo inercial, es infinita.

Esto se desprende de las fórmulas para $\frac{dt}{d\tau}$ y $\frac{dr}{d\tau}$ obtenidas en el Apéndice D. De estas fórmulas se desprende, para $r_S < r \le r_0$:

$$t(r) = -\frac{1}{c} \cdot \sqrt{\frac{r_0}{r_S} - 1} \cdot \int_{r_0}^{r} \frac{r'^{\frac{3}{2}}}{(r' - r_S) \cdot \sqrt{r_0 - r'}} \cdot dr' \qquad (5)$$

Cuando la coordenada radial se aproxima a r_S la integral diverge a $+\infty$.

Entonces, como la coordenada temporal $t(r)$ corresponde al tiempo para el cual la partícula se encuentra a una distancia r del centro del agujero negro, tal como lo determina un observador inercial muy alejado y respecto del cual la masa del agujero negro se halla en reposo, para este observador inercial el tiempo de aproximación de la partícula (tiempo inercial) desde $r = r_0$ hasta el horizonte de eventos ($r = r_S$)es infinito.

Una consecuencia de esta doble descripción, en un caso por un observador alejado y en reposo respecto del agujero, y en el otro caso por un observador en co-movimiento con la materia atraída hacia el agujero, es la imposibilidad de asignar un valor del tiempo t en el que ocurren los eventos que determina el primer observador, para cada valor que puede tomar el tiempo propio τ, en el que ocurren de los eventos que determina el segundo observador.

5.-Discusión y conclusiones

Todo el análisis anterior sobre la relación entre el tiempo propio y el tiempo inercial se basa en la validez de la hipótesis del reloj y en el concepto de reloj ideal. Se supone que el ritmo de un reloj ideal acelerado es igual al ritmo de un reloj no acelerado en co-movimiento con el reloj acelerado, independientemente de la historia de velocidad del reloj con respecto a un sistema inercial de referencia. Por lo tanto, no se introducen limitaciones en las aceleraciones propias permisibles. Sin embargo, algunos trabajos recientes, ya sea de reinterpretación de experimentos conocidos (10) (11) o bien desarrollos teóricos (12) (13), sugieren la posible existencia de aceleraciones máximas. Si esto es correcto, en el marco de la relatividad especial, la hipótesis del reloj sería solo una aproximación a una relación más general.

En ausencia de efectos gravitatorios, y en el marco de la relatividad especial, un reloj fijo a un sistema de inercia y aislado de las acciones externas, si se construye correctamente, podría considerarse un reloj ideal. Después de acelerar, uno esperaría que se comportara tanto más cercano de un reloj ideal cuanto menor sea la relación entre la magnitud de las fuerzas externas asociadas con la aceleración y la magnitud de las fuerzas de cohesión internas asociadas con la integridad de la estructura material del reloj.
La hipótesis del reloj se confirmó para las vidas medias de muones positivos y negativos almacenados en una órbita circular con aceleraciones transversales, y para las vidas medias de los bariones Sigma con aceleraciones longitudinales. (14) (15) (16)
La concordancia observada entre las vidas medias de las partículas aceleradas y la del mismo tipo de partículas, con la misma energía, moviéndose inercialmente, confirma la hipótesis del reloj para aceleraciones de casi 10^{19} m / s^2 en el primer caso y casi 10^{16} m / s^2 en el segundo caso.

Para concluir con lo que se refiere a la convergencia de la integral del tiempo propio en el marco de la teoría restringida de la relatividad:

Nada especial parece caracterizar el comportamiento de la componente tangencial de los campos de 3-fuerzas, a lo largo de la trayectoria del reloj acelerado y respecto de un marco inercial, en relación con la convergencia o divergencia de la integral que da el tiempo propio como función del tiempo inercial. Las historias fronterizas de 3-fuerza tangencial que dan convergencia en un caso o divergencia en otro, involucran fuerzas crecientes en ambos casos, la única diferencia aparece en el orden de crecimiento al infinito.

Sin embargo, vista desde el punto de vista de la aceleración propia del reloj, aparece una diferencia físicamente significativa entre: (a) las historias de aceleración propia tangencial (y las historias de 3-fuerza propia relativista tangencial) que dan un tiempo propio finito para un tiempo inercial infinito y (b) aquellas historias de 3- aceleraciones tangenciales propias (y sus historias de 3-fuerzas relativistas propias tangenciales) que dan un tiempo propio infinito por un tiempo inercial infinito. Ya sea una singularidad en la 3- aceleración propia (y en la 3-fuerza propia) para un valor finito del tiempo propio en un caso, o su ausencia en el otro caso.
Si admitimos que las aceleraciones propias no pueden tener singularidades en la trayectoria del reloj acelerado, se puede excluir el caso del tiempo propio finito para un tiempo de inercia infinito, y se resuelve el problema que motiva este trabajo.

Con referencia a lo que acontece con el tiempo propio durante la caída hacia un agujero negro, en el marco de la teoría de la relatividad generalizada:

Según un observador inercial, un observador acelerado que cae libremente hacia un agujero negro, nunca cruza el horizonte de eventos del agujero negro.
Para el observador que cae, el evento de cruce acontece para un valor finito de su tiempo propio. Los tiempos propios más allá de ese punto nunca son accesibles para el observador inercial externo si suponemos que el tiempo no tiene fin: parte de la experiencia del observador acelerado respecto del observador fijo a un marco inercial, se desarrolla para valores de tiempo (tiempo propio del reloj acelerado) que no tienen equivalente en la experiencia del observador inercial.
Entonces parte de la evolución del universo del observador no inercial debe ocurrir fuera del universo del observador inercial, porque el tiempo de este último literalmente se agotó.
Este tipo de situación entra en contradicción con el principio según el cual la equivalencia entre todos los posibles sistemas de referencia para describir el mundo físico debería implicar que existe una correspondencia entre los instantes que dos observadores atribuyen al mismo evento, tal que a cada instante determinado por uno de ellos le corresponda un único instante determinado por el otro para el mismo evento.
Es decir, los eventos que acontezcan en la experiencia finita de un observador también deben acontecer en la experiencia finita de otro observador: **unus mundus**, hay un solo mundo (físico).
Evidentemente las consecuencias de los modelos relativistas más aceptados para describir los agujeros negros implican que no se cumple el principio mencionado: no hay un solo mundo físico en el sentido que le hemos dado a esta expresión.

Para el observador que se está acelerando, el observador inercial desaparecerá detrás de un horizonte. Como se menciona en el Apéndice B, sección (B.2), esto ocurre ya para el caso de un observador con aceleración propia constante. Si la aceleración es constante la integral del tiempo propio diverge cuando el tiempo inercial tiende a infinito, y no aparece el problema que motiva este trabajo.
Pero como se muestra en el Apéndice B, sección (B.1), si la aceleración aumenta lo suficiente con el tiempo, la integral del tiempo propio converge cuando el tiempo inercial tiende a infinito. Entonces, desde el punto de vista del observador inercial, la dilatación del tiempo del reloj acelerado será tan fuerte que el observador que viaja con el reloj acelerado nunca alcanzará el correspondiente valor límite del tiempo propio. Desde el punto de vista del observador acelerado se puede exceder el tiempo propio crítico, pero el observador inercial habrá desaparecido detrás de un horizonte, ubicado en sentido opuesto al de la aceleración. Para el observador inercial, el horizonte detrás del cual desaparece el observador acelerado está en el infinito. Por lo tanto, para los tiempos propios más allá del valor límite, el observador acelerado debe estar, de hecho, fuera del universo del ob-

servador inercial. Pero lo dejó en la dirección del tiempo, por así decirlo. Moviéndose infinitamente largo a casi la velocidad de la luz, él también está a una distancia infinita.

En suma, en el marco de la teoría restringida de la relatividad, un observador con suficiente energía como para lograr una historia de velocidad adecuada podría recorrer una distancia infinita en un tiempo propio finito.
En el marco de la teoría generalizada de la relatividad, un observador que cae en un agujero negro a partir del reposo (respecto de un observador ubicado en un sistema inercial) recorre una distancia finita demorando un tiempo infinito desde el punto de vista del observador inercial. No obstante, el observador acelerado hacia el agujero negro recorre esa distancia en un tiempo propio finito.

Apéndice A: postulado del reloj y paradoja de los gemelos.

Consideremos dos relojes ideales. Un primer reloj está fijo a un sistema de referencia inercial. El tiempo inercial, dado por este reloj, se representa por t.
Un segundo reloj, hasta el instante t_i se encuentra también en reposo adyacente al primer reloj y sincronizado con él.
Desde el instante t_i en adelante, el segundo reloj se aparta del primero y viaja siguiendo una trayectoria con velocidad $\vec{v}\left(t\right)$ con respecto al sistema inercial.
En un instante posterior t_f el segundo reloj encuentra nuevamente al primero y se detiene adyacente a él.
Siendo la trayectoria cerrada, las posibles historias de velocidad $\left\{\vec{v}\left(t\right)\right\}$ verifican la restricción: $\int_{t_i}^{t_f} \vec{v}\left(t\right)\cdot dt = \vec{0}$ Pero, por lo demás, son arbitrarias (aunque, por supuesto, con las condiciones de regularidad bien conocidas y asumidas en mecánica).
El tiempo transcurrido entre la partida y la llegada medido por el reloj fijo al sistema de referencia inercial es $t_f - t_i$. El tiempo transcurrido entre esos mismos eventos, medido por el reloj acelerado, siendo $v\left(t\right) = \left\|\vec{v}\left(t\right)\right\|$ la historia de rapidez correspondiente a la historia de velocidad $\vec{v}\left(t\right)$, de acuerdo con la hipótesis del reloj es $\int_{t_i}^{t_f} \sqrt{1-\frac{v^2\left(t\right)}{c^2}}\cdot dt$

Este intervalo de tiempo es siempre menor que el intervalo medido por el reloj inercial. Si se asume que el tiempo propio es también la medida del tiempo más conveniente para medir procesos biológicos, esta es la denominada y bien conocida “paradoja de los gemelos”. Queda claro que la posible convergencia de la integral $\int_{t_0}^{+\infty}\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\cdot dt$ es otra cosa, aunque esa convergencia presupone la dilatación del tiempo de los relojes acelerados.

Apéndice B: dos historias de rapidez sobre la trayectoria de un reloj acelerado.

(B.1) Primer ejemplo de una historia de rapidez a la que corresponde un tiempo propio finito para un tiempo inercial infinito.

Consideremos la siguiente historia de rapidez sobre la trayectoria del reloj:

$$\frac{v(t)}{c}=\sqrt{1-k_s^2\cdot e^{-\frac{k_s}{T_s}\cdot t}} \qquad t\geq 0 \qquad \text{(B.1)}$$

Ambos parámetros k_s y T_s son positivos. Se introduce la restricción $k_s<1$ con el propósito de tener un valor finito de $\frac{d}{dt}v(0)$. Aquí se toma $t_0=0$ y $\tau(t_0)=0$

El tiempo propio viene dado en función del tiempo inercial:
En este caso la función siguiente da el tiempo propio como función del tiempo inercial:

$$\tau(t)=\int_0^t\sqrt{1-\frac{v^2(t')}{c^2}}\cdot dt'=T_s\cdot\left(1-e^{-\frac{k_s}{T_s}\cdot t}\right) \qquad t\geq 0 \qquad \text{(B.2)}$$

La función inversa es: $$t(\tau)=-\frac{T_s}{k_s}\cdot\log_e\left(1-\frac{\tau}{T_s}\right) \qquad 0\leq\tau<T_s=\tau_s \qquad \text{(B.3)}$$

De (B.1) y (B.3) se desprende la rapidez respecto del marco inercial pero en función del tiempo propio: $$\frac{v(\tau)}{c}=\sqrt{1-k_s^2\cdot\left(1-\frac{\tau}{T_s}\right)^2} \qquad 0\leq\tau<T_s=\tau_s \qquad \text{(B.4)}$$

Sustituyendo (B.4) en la fórmula para la componente tangencial de la 3-aceleración propia resulta, para $0\leq\tau<T_s=\tau_s$:

$$\vec{a}^{0}(\tau)\bullet\vec{t}_{\Gamma}(\tau)=\frac{\vec{f}^{0}(\tau)\bullet\vec{t}_{\Gamma}(\tau)}{m_0}=\frac{c}{\sqrt{1-k_s^2\cdot\left(1-\frac{\tau}{T_s}\right)^2}}\cdot\frac{1}{(T_s-\tau)} \qquad \text{(B.5)}$$

Como $\frac{c}{\sqrt{1-k_s^2\cdot\left(1-\frac{\tau}{T_s}\right)^2}}$ es una función regular del tiempo propio, de (B.5) deducimos que la componente tangencial de la 3-aceleración propia (y por ende la 3-aceleración propia) posee un polo de primer orden para $\tau=T_s$

Respecto al marco de referencia inercial la componente tangencial de la 3-fuerza relativista viene dada por:

$$\frac{\vec{f}^{0}(t)\bullet\vec{t}_{\Gamma}(t)}{m_0}=\frac{1}{T_s}\cdot\frac{c\cdot e^{\frac{2k_s}{T_s}\cdot t}}{\sqrt{e^{\frac{2k_s}{T_s}\cdot t}-k_s^2}} \qquad t\geq 0 \qquad \text{(B.6)}$$

Asintóticamente, para $t\rightarrow+\infty$:

$$\frac{\vec{f}^{0}(t)\bullet\vec{t}_{\Gamma}(t)}{m_0}\approx\frac{c\cdot e^{\frac{k_s}{T_s}\cdot t}}{T_s} \qquad \text{(B.7)}$$

(B.2) Ejemplo de historia de rapidez a la que corresponde un tiempo propio infinito para un tiempo inercial infinito, pero para la cual existe un horizonte de eventos: el observador no inercial de Rindler.

Consideremos la siguiente historia de rapidez sobre la trayectoria del reloj:

$$v(t)=\frac{\alpha\cdot t}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2\cdot t^2}{c^2}}} \qquad t\geq 0 \qquad \text{(B.8)}$$

El parámetro α es una aceleración propia constante, tangencial a la trayectoria. Un observador no-inercial que se mueve con aceleración propia uniforme a lo largo de una línea recta se denomina observador de Rindler. (2) (4)

Entonces, para $t\geq 0$:

$$\tau(t)=\int_0^t\sqrt{1-\frac{v^2(t')}{c^2}}\cdot dt'=\frac{c}{\alpha}\cdot\log_e\left(\frac{\alpha\cdot t}{c}+\sqrt{1+\frac{\alpha^2\cdot t^2}{c^2}}\right) \qquad \text{(B.9)}$$

De (B.9) resulta, asintóticamente para $t \to +\infty$: $\tau(t) \approx \frac{c}{\alpha} \cdot \log_e\left(2 \cdot \frac{\alpha \cdot t}{c}\right)$ de modo que $\lim_{t \to +\infty} \tau(t) = +\infty$ Un tiempo propio infinito corresponde a un tiempo inercial infinito, a diferencia de lo que acontece con la historia de velocidad estudiada en la sub-sección anterior a ésta.

La function inversa es (2): $$t(\tau) = \frac{c}{\alpha} \cdot sh\left(\frac{\alpha \cdot \tau}{c}\right) \quad \tau \geq 0 \qquad \text{(B.10)}$$

La rapidez respecto del marco inercial, pero en función del tiempo propio viene dada por la conocida fórmula (2): $$\frac{v(\tau)}{c} = th\left(\frac{\alpha \cdot \tau}{c}\right)$$

Para el observador que se está acelerando, el observador inercial desaparecerá detrás de un horizonte. Esto último puede verse bien desarrollado en la referencia (2).

Apéndice C: Ejemplo de singularidad en la 3-aceleración propia que conduce a la convergencia de la integral del tiempo propio.

Supongamos que $e^{+\psi(\tau)} = \frac{A(\tau)}{(\tau_s - \tau)^p}$ donde $A(\tau)$ es una función positiva regular, acotada en el intervalo cerrado $[\tau_0, \tau_s]$ y con una cota inferior positiva en ese intervalo.

Entonces, en lo referido a la convergencia o divergencia de integrales impropias, $e^{+\psi(\tau)}$ se comporta asintóticamente como $\frac{1}{(\tau_s - \tau)^p}$ cuando $\tau \uparrow \tau_s$. La integral impropia $\int_{\tau_0}^{\tau_s} e^{+\psi(\tau')} \cdot d\tau'$ es divergente siempre y cuando la integral impropia $\int_{\tau_0}^{\tau_s} \frac{1}{(\tau_s - \tau')^p} \cdot d\tau'$ lo sea. Y la divergencia de esta última integral se produce siempre y cuando $p \geq 1$. Escribamos (3.6) nuevamente: $\psi_\Gamma(\tau) = \frac{1}{c} \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \vec{a}^0(\tau') \bullet \vec{t}_\Gamma(\tau') \cdot d\tau'$

Habiendo asumido que $e^{+\psi(\tau)} = \frac{A(\tau)}{(\tau_s - \tau)^p}$ resulta:

$$\frac{\vec{a}^0(\tau)\bullet\vec{t}_\Gamma(\tau)}{c}=\frac{d}{d\tau}\psi_\Gamma(\tau)=\frac{d}{d\tau}\left(\log_e A(\tau)-p\cdot\log_e(\tau_s-\tau)\right)=\frac{\frac{dA(\tau)}{d\tau}}{A(\tau)}+\frac{p}{\tau_s-\tau}$$

Por hipótesis $A(\tau)$ posee una cota inferior positiva en $[\tau_0,\tau_s]$ y $\frac{d}{d\tau}A(\tau)$ también está acotada allí debido a que, por la regularidad de la función $A(\tau)$, su derivada es continua en ese intervalo de tiempo propio. Entonces $\frac{\frac{dA(\tau)}{d\tau}}{A(\tau)}$ es acotada en $[\tau_0,\tau_s]$ y la componente tangencial de la 3-aceleración propia $\vec{a}^0(\tau)\bullet\vec{t}_\Gamma(\tau)$ se comporta asintóticamente como $\frac{p\cdot c}{\tau_s-\tau}$ cuando $\tau\uparrow\tau_s$.

Apéndice D: Tiempo propio y tiempo inercial durante la caída de una partícula en un agujero negro. (9)

Consideremos el intervalo en el caso de un movimiento a lo largo de la coordenada radial de la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2=c^2\cdot\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\cdot dt^2-\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\cdot dr^2$$

En función de un parámetro u :

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2=c^2\cdot\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\cdot\left(\frac{dt}{du}\right)^2-\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{dr}{du}\right)^2=F^2\left(\frac{dt}{du},r,\frac{dr}{du}\right)$$

El movimiento del cuerpo siguiendo una trayectoria $(t(u),r(u))$ en el tiempo-espacio curvado por la masa $M_\bullet$ del agujero negro y que pase por dos posiciones $(t(u_1),r(u_1))$ y $(t(u_2),r(u_2))$ dadas, deberá ser una geodésica temporaloide en ese tiempo-espacio.

En consecuencia hará extrema la integral:

$$\int_{u_1}^{u_2}F\left(\frac{dt(u)}{du},r(u),\frac{dr(u)}{du}\right)\cdot du$$

Las ecuaciones de Euler correspondiente a este problema de cálculo de variaciones son:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial F}{\partial \frac{dt}{du}}\right)-\frac{\partial F}{\partial t}=0 \qquad \frac{d}{du}\left(\frac{\partial F}{\partial \frac{dr}{du}}\right)-\frac{\partial F}{\partial r}=0$$

Teniendo en cuenta la definición de F , la ecuación de Euler para la coordenada temporal se reduce a:

$$\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}=\frac{c^2\cdot\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\cdot\frac{dt}{du}}{F}=H=cte$$

Si elegimos el tiempo propio τ como parámetro, $F=c$ y en consecuencia se verifica:

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{H}{c\cdot\left(1-\frac{r_S}{r}\right)}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión de $F^2=c^2$ se deduce que

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2=H^2-c^2\cdot\left(1-\frac{r_S}{r}\right)$$

Si el movimiento comienza del reposo (respecto del observador inercial en el infinito) y lejos del horizonte $r=r_S$ del agujero negro, en un punto de coordenada radial $r=r_0$, con $\frac{dr}{d\tau}=0$ en ese punto, la constante de integración queda determinada:

$$H^2=c^2\cdot\left(1-\frac{r_S}{r_0}\right) \qquad \text{Entonces} \quad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2=c^2\cdot\left(\frac{r_S}{r}-\frac{r_S}{r_0}\right)$$

Además, si se asume que la coordenada temporal y el tiempo propio crecen al unísono de modo que $\frac{dt}{d\tau}>0$, la constante debe ser positiva: $H=+c\cdot\sqrt{\left(1-\frac{r_S}{r_0}\right)}$

En consecuencia:

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{H}{c\cdot\left(1-\frac{r_S}{r}\right)}=+c\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{r_S}{r_0}}}{\left(1-\frac{r_S}{r}\right)}$$

Puesto que el cuerpo se dirige hacia el agujero negro, $\frac{dr}{d\tau}=-c\cdot\sqrt{\frac{r_S}{r_0}}\cdot\sqrt{\left(\frac{r_0}{r}-1\right)}$

Separando variables e integrando entre $\tau = 0$ (cuando $r = r_0$) y τ (para un valor $r < r_0$) se obtiene: $\sqrt{(r_0 - r)\cdot r} + r_0 \cdot arcsen\left(\sqrt{1 - \frac{r}{r_0}}\right) = c \cdot \sqrt{\frac{r_S}{r_0}} \cdot \tau$

A medida que el tiempo propio aumenta, la coordenada radial disminuye aproximándose a cero, donde se encuentra la singularidad.

En el límite, cuando $r = 0$, se tiene $r_0 \cdot arcsen(1) = c \cdot \sqrt{\frac{r_S}{r_0}} \cdot \tau_\bullet$

Como $arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$, el intervalo de tiempo propio insumido en alcanzar la singularidad verifica: $\tau_\bullet = \frac{\pi}{2 \cdot c} \cdot \frac{r_0^{\frac{3}{2}}}{r_S^{\frac{1}{2}}}$

El intervalo de tiempo propio τ_S insumido en llegar al radio de Schwarzschild viene dado por la expresión implícita:

$$r_0 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{r_S}{r_0}\right) \cdot \frac{r_S}{r_0}} + r_0 \cdot arcsen\left(\sqrt{1 - \frac{r_S}{r_0}}\right) = c \cdot \sqrt{\frac{r_S}{r_0}} \cdot \tau_S$$

Como supusimos que $\frac{r_S}{r_0}$ es despreciable, es posible desarrollar las funciones del miembro de la izquierda en potencias de $\frac{r_S}{r_0}$ con lo cual se obtiene la aproximación:

$$\tau_S \approx \frac{r_0^{\frac{3}{2}}}{c \cdot r_S^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{r_S}{r_0}\right)^{\frac{3}{2}}\right] = \tau_\bullet - \frac{2}{3} \cdot \frac{r_S}{c}$$

Entonces el intervalo de tiempo $\tau_\bullet - \tau_S$ propio requerido para caer desde el horizonte de eventos, situado en $r = r_S$ hasta la singularidad central del agujero negro, situada en $r = 0$ se puede estimar en $\frac{2}{3} \cdot \frac{r_S}{c}$

Así pues, un cuerpo que se deja caer desde el reposo, a partir de un valor de su coordenada radial muy grande respecto del radio de Schwarzschild de un agujero negro que no rota, emplea un intervalo finito de tiempo propio en alcanzar la singularidad situada en el origen de coordenadas. (2) (3)

Agradecimentos: Al ingeniero G. Bernasconi, del Organismo Internacional de Energía Atómica, Viena, Austria, y al profesor K. Kassner del ITP, Otto-von-Guericke-Universität, Magdeburgo, Alemania, por comentarios valiosos sobre el contenido de una versión preliminar, en inglés, del presente artículo.

Referencias

1-. Taylor, E. y Wheeler J., Space-time Physics, (2nd edition) New York: Freeman, 1992

2-. Hobson M., Efstathiou G., y Lasenby A., General Relativity, New York: Cambridge University Press, 2006

3-. Rindler, W., Relativity, New York: Oxford University Press, 2006

4-. Gourgoulhon, E., Special Relativity in General Frames, Berlin: Springer, 2013.

5-. Moller, C., Theory of Relativity, London: Oxford University Press, 1952

6-. Rindler, W., Introduction to Special Relativity, (2nd edition), New York: Oxford University Press, 1991.

7-. Brown, H., Physical Relativity, Oxford: Clarendon Press, 2005.

8-. Suárez-Antola R. y Ferrari J, About the slowing down of accelerated clocks, Lettere al Nuovo Cimento, 1985, 44(8): 599-600.

9.- Suárez-Antola R., El principio de relatividad y el problema del conocimiento, Buenos Aires: Dunken, 2012.

10-. Friedman, Y. 2010, Testing Doppler type shift for an accelerated source and determination of the universal maximum acceleration,

11-. Potzel, W.,Clock hypothesis of relativity theory, maximal acceleration, and Mösbauer spectroscopy, 2014.

12-. Schuller, F., Born-Infeld kinematics and correction to the Thomas precession, Physics Letters B 540, 2002, 119-124.

13-. Papini, G., Revisiting Caianiello's Maximal Acceleration, Nuovo Cimento B, 2003, **117**:1325-1331

14-. Bailey, H.; Borer, K.; Combley F.; Drumm H.; Krienen F.; Lange F.; Picasso E.; Ruden W. von; Farley F. J. M.; Field J.H.; Flegel W. & Hattersley P. M., Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit, Nature, 1977, 268 (5618): 301–305

15-. Bailey J. et al., Final report on the CERN muon storage ring including the anomalous magnetic moment and the electric dipole moment of the muon, and a direct test of relativistic time dilation, Nuclear Physics B, 1979, 150.

16-. Roos, C. E.; Marrafino, J.; Reucroft, S.; Waters, J.; Webster, M. S.; Williams, E. G. H., σ+/- lifetimes and longitudinal acceleration, Nature, 1980, 286 (5770): 244–24.